בהינתן זרימה f בונים רשת שיורית $G_f=(V,E_f)$. E_f מכילה קשתות מקוריות (u,v) עבורן $f(u,v)<c(u,v)$ ואנטי קשתות (v,u) עבורן $f(u,v)$. והקיבול השיורי $c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$ תקף גם לקשתות ואנטי קשתות.

מסלול משפר p: מסלול מ-s ל-t ב-G_f. הקיבול השיורי של p: $c_p=\min_{(u,v)\in p} c_f(u,v)>0$ ומשפרים את f ע"י רק שלכל $(u,v)\in p$ מתקיים $f^*(u,v)=f(u,v)+c_p$ ולכל שאר הקשתות ללא שינוי למעט האנטי קשתות של המסלול.

$$s \xrightarrow{2} \overset{a}{\circ} \xrightarrow{4} \overset{b}{\circ} \xrightarrow{5} \overset{c}{\circ} \xrightarrow{3} t \quad c_p=2$$

נניח שיש לנו מסלול משפר. ייתכן ש-(a,b) היא אנטי קשת ו-$f(b,a)=4$.

ולכן,
$$f^*(a,b)=f(a,b)+2=-4+2=-2$$
$$f^*(b,a)=2$$

<u>טענה:</u> f^* זרימה חוקית. $|f^*|=|f|+c_p>|f|$

<u>הוכחה:</u> אילוץ קיבול - $f^*(u,v)\le c(u,v)$ לכל קשת (u,v).

אם (u,v) קשת מקורית במסלול המשפר אזי

$$f^*(u,v)=f(u,v)+c_p\le f(u,v)+c_f(u,v)=f(u,v)+(c(u,v)-f(u,v))=c(u,v)$$

אם (u,v) קשת מקורית ו-$(v,u)\in p$ אזי

$$f^*(v,u)=f(v,u)+c_p$$

וגם $0\le$
$$f^*(u,v)=-f^*(v,u)=-f(v,u)-c_p=f(u,v)-c_p\le c(u,v)$$
(רק הקטנו)

$$c_f(v,u)=f(u,v)\ge c_p$$

<u>שימור הזרימה</u>

מספיק להראות ש-u על p

<u>$|f^*|$ - נסתכל מה יוצא מ-s.</u>

הקשת הראשונה ב-p היא קשת מקורית ולכן לאורכה הזרימה <u>גדלה</u> ב-c_p ⇐ הזרימה היוצאת מ-s גדלה c_p.

<u>נשים לב:</u> כאשר מתקיים $f\equiv 0$ $G_f=G$.

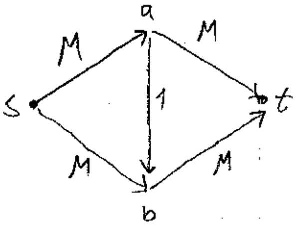
(*) האלגוריתם של פורד-פולקרסון לא מציין איך למצוא את המסלול מ-s ל-t. למשל (נמצא) ע"י BFS.

נותרות לגבי האלגוריתם 2 השאלות:

1) מהי יעילות האלגוריתם?

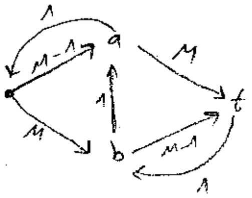
2) נכונות - השאלה, f מקסימלית. (כ"ל שאם אין מסלול משפר ב-G_f אז f מקסימלית).

① יעילות האלגוריתם



נראה דוגמה שבה האלגוריתם לוקח הרבה זמן. (נסתכל על הגרף: כאשר M הוא ערך גדול מאוד.

הזרימה המקסימלית היא $2M$ בדיוק (כי זה כל מה שיכול לצאת מ-s ולהכנס ל-t). אם בוחרים בקפידה "רבה" ניתן למצוא את הזרימה הזו ב-2 צעדים. מזרימים בקשתות העליונות M, ואז הן גם יורדות מהגרף ולאחר מכן להזרים בתחתונית.



אך ניתן גם להזרים בדרך לא חכמה: $f\equiv 0$ $G_f=G$
$p=(s,a,b,t)$; אז $c_p=1$. (נסתכל על הרשת השיורית לאחר צעד אחד:

אם נמשיך הלאה, האלגוריתם בדרך זו יקח $2M$ צעדים.

למעשה, אם הקיבולים אי-רציונליים, אפשר לגרום ל-FF לא לעצור.

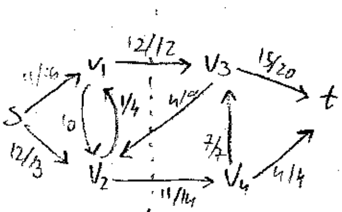
אם כל הקיבולים רציונליים ← מכפילים במכנה משותף כדי שיהיו שלמים ואז FF תמיד יעצור. מספר הצעדים הוא $\le$ ערך הזרימה המקסימלית. $|f^*|$
האלגוריתם פועל כך שהקיבולים תמיד נשארים שלמים, ולכן בכל צעד $c_p\ge 1$
ולכן כל צעד מגדיל את ערך הזרימה במספר שלם חיובי ≥ 1.
⇐ יעצור אחרי לכל היותר $|f^*|$ צעדים.

(*) זה רק מעיד כי זה תלוי הקיבולים ולא רק בגודל, זה יהיה תלוי בדמות/קשתות.

② נכונות (נחזור ליעילות בהמשך)

נראה שאם אין מסלול משפר ב-G_f אז f מקסימלית.
נראה לפי משפט MAX FLOW – Min Cut.

משפט MAX FLOW – MIN CUT



$c(S,T)=26$

$f(S,T)=19$

נגדיר חתך (CUT) חלוקה של V לשתי קבוצות זרות (S,T) כך ש- $s\in S$, $t\in T$.

הקיבול של חתך (S,T) הוא $c(S,T)$ והזרימה דרך החתך (S,T) היא $f(S,T)$.

$$c(S,T)=\sum_{\substack{u\in S\\ v\in T\\ (u,v)\in E}} c(u,v) \qquad f(S,T)=\sum_{\substack{u\in S\\ v\in T\\ (u,v)\in E}} f(u,v)$$

טענה: לכל זרימה f ולכל חתך (S,T) מתקיים $|f|=f(S,T)$
למשל $S=\{s\}$, $T=V/\{s\}$; $S=V/\{t\}$, $T=\{t\}$

$$f(S,T)=f(S,V/S)=f(S,V)-\underbrace{f(S,S)}_{=0}=f(S,V)$$

$$=\underbrace{f(\{s\},V)}_{|f|}+\underbrace{f(S/\{s\},V)}_{0}$$

בגלל שימור הזרימה

$$\sum_{\substack{u\in S/\{s\}\\ u\neq s,t}} \overbrace{f(u,v)}^{0}$$

<u>טענה:</u> לכל זרימה f ולכל חתך (S,T) $f(S,T)\le c(S,T)$ ($|f|=$).

<u>הוכחה:</u> פשוט נראה לכל קשת (u,v) [$u\in S$, $v\in T$] שגם
(u,v) קשת מקורית אז $f(u,v)\le c(u,v)$ ואם (u,v) אינו
קשת כלומר (v,u) היא קשת $c(u,v)=0$
$f(u,v)=-f(v,u)\le 0=c(u,v)$.

משתי הטענות נובע שערך כל זרימה ≤ קיבול כל חתך ⇐ ערך זרימה מקסימלית ≤ קיבול מינימלי של חתך.

בדוגמה שראינו החתך המינימלי הוא כאשר v_3 ו-t יחד וכל השאר בצד השני. בחתך זה $c(S,T)=12+7+4=23$.

<u>משפט MFMC</u>, 3 התנאים הבאים שקולים לזרימה f ברשת G:

1) f זרימה מקסימלית.

2) ברשת השיורית G_f אין מסלול שיפור מ-s ל-t.

3) $|f|=c(S,T)$ לאיזשהו חתך (S,T).

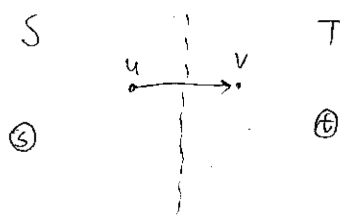
<u>הוכחת המשפט:</u>

<u>(1) ⇐ (2):</u> ברור כי אם היה מסלול משפר היינו יכולים להגדיל את ערך הזרימה.

<u>(2) ⇐ (3):</u> נניח שב-G_f אין מסלול מ-s ל-t. נבנה חתך (S,T): נשים ב-S את כל הצמתים הנגישים מ-s ב-G_f וב-T את כל השאר. $s\in S$ ו-$t\in T$ כי לפי ההנחה t לא נגיש מ-s.

נראה ש-$|f|=c(S,T)$. נראה כבר ש-$f(S,T)=c(S,T)$ ($=|f|$) ונראה זאת לכל קשת בחתך.

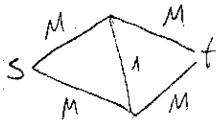
(u,v) קשת בחתך כלומר $u\in S$ ו-$v\in T$ ונראה $f(u,v)=c(u,v)$



אם (u,v) קשת מקורית ונניח בשלילה שמתקיים
$f(u,v)<c(u,v)$ ⇐ $c_f(u,v)>0$ ⇐ $(u,v)\in E_f$.
⇐ אם u נגיש מ-s ב-G_f אז גם
v נגיש מ-s, בסתירה לכך ש-$v\in T$
ולכן $f(u,v)=c(u,v)$.

אם (u,v) הוא אינו קשת, כלומר (v,u)
היא קשת, נוכיח $f(v,u)=f(u,v)=0$. כי אם
לא, כלומר $f(v,u)>0$ כלומר $f(u,v)<0$ אז
$(u,v)\in E_f$ וכמו קודם נקבל סתירה

(3) ← (1): מיידי, כי לכל זרימה f' $|f'| \le c(S,T)$ ולכן $|f|$ מקסימלית.



שיפור:

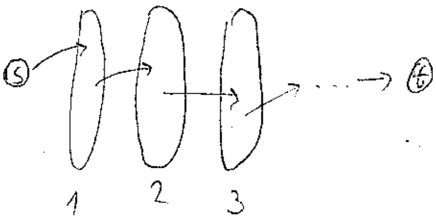
רעיון: לחפש מסלולים משפרים קצרים ביותר מבחינת מספר הקשתות. נעשה זאת ע"י BFS על הרשת השיורית.

(מסמן את מספר האיטרציות של האלג' = מס' המסלולים המשפרים) זמן ריצת האלגוריתם תהיה מס' האיטרציות $\times$ זמן BFS
$O(|E|+|V|)=O(|E|)$
כי הגרף קשיר לפי הנחה.

נוכיח שמס' האיטרציות הוא $O(|E||V|)$ ולכן זמן $O(E^2V)$.

נתון מסלול BFS על G_f מ-s. (נסמן $\delta_f(s,v)$ את המרחק מ-s ל-v ב-G_f (= מס' הקשתות).

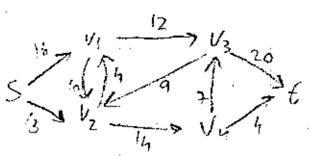
BFS בונה שכבות. s בשכבה ה-0, בשכבה ה-j = כל הצמתים במרחק j מ-s ($j=1,2,3,\dots$). t יימצא בשכבה k וגם כלהם מכל הצמתים האחרים, שעוד לא התגלו. כמו כן, גם בשכבה ה-k נמצא רק את t.



נשמור רק על הקשתות משכבה לשכבה הבאה, ונקבל רשת שכבתית.

טענה: אחרי כל איטרציה לכל צומת v, המרחק $\delta_f(s,v)$ עולה (לא יורד) בפרט המרחק $\delta_f(s,T)$ = מס' השכבות עולה (לא יורד).

נצייר לדוגמא שוב



$\delta_f(s,t)=3$

הוכחה: נניח בשלילה שזה לא נכון ונסתכל על האיטרציה הראשונה שבה קורה ← מתקיים צומת v שעבורו $\delta_f(s,v) < \delta_{f'}(s,v)$ (f' = הזרימה אחרי השלב הקודם). ונבחר v כזה הכי קרוב ל-s עם $\delta_{f'}(s,v)$ מינימלי.

מסלול נניח כי $G_{f'}$ מ-s ל-v: $s \to \to \to \to u \to v$

$\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)-1$ ⇐ u צומת טוב $\delta_{f'}(s,u) \ge \delta_f(s,u)$.

$(u,v)\in E_{f'}$. האם $(u,v)\in E_f$? נניח שכן. זה יכול להיות רק באחת מ-2 אפשרויות:

1) (u,v) קשת מקורית $f'(u,v) < c(u,v)$

2) (u,v) אנטי קשת $c(v,u) \dots f'(v,u)$.

בכל מקרה, אנו יודעים ש- $\delta_f(s,v) \le \delta_f(s,u)+1$ כי $(u,v) \in E_f$

$\le \delta_f(s,u)+1=\delta_{f'}(s,v)$ ולכן v צומת טוב. ולכן, $(u,v)\notin E_f$.

G_f

$s \to \to \to v \to u \to \to t$

מסלול משפר   הרעיון שלנו

זה יכול להיות רק אם הקשת הייתה על המסלול המשפר מ-f ל-f'.

$s \to \to v \to u \to \to t$

$G_{f'}$ מקל' ב

$\delta_f(s,v)-1 = \delta_f(s,u) \ge \delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)+1 > \delta_f(s,v)+1$

סתירה.

30.12.07 (5)

אלגוריתמים - שיעור 9

<u>טענה:</u> האלגוריתם מבצע $O(EV)$ איטרציות מסלולים משפרים.

<u>הוכחה:</u> בכל שיפור משפרים לאורך מסלול, לפחות קשת אחת עליו (u,v) נהיית <u>רוויה</u> כי אותה קשת שקיבולתה השיורית שווה ל-c_f. קשת רוויה לא תופיע ברשת השיורית הבאה. נקרא לקשת הזו קשת קריטית.

ניקח קשת מסוימת (u,v) ונמצא את מס' הפעמים שהיא חוזרת לרשת השיורית. נראה שזה קורה לכל היותר $\geq$ בערך $\frac{V}{2}$ פעמים.

יש לנו E קשתות $\Leftarrow$ אחרי $O(EV)$ שיפורים נעצרים.

(u,v) יוצאת מהרשת השיורית אחרי ששיפרנו מזרימה f. כלומר, היא על מק"ב ב-G_f מ-s ל-t (מסלול משפר) יקיים $\boxed{\delta_f(s,v)=\delta_f(s,u)+1}$.

לאחר מכן היו הרבה שיפורי מסלולים מזרימה f'. בדיוק כמו קודם זה ייתכן רק אם (v,u) (ההפוכה) הייתה על המסלול המשופר ב-$G_{f'}$ $\Leftarrow$ $\boxed{\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)+1}$.

$$\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)+1 \geq \delta_f(s,v)+1=\delta_f(s,u)+2$$

הראנו שבין יציאה של הקשת לכניסה מחדש, המרחק של u מ-s גדל לפחות ב-2 ולכן זה יכול לקרות לכל היותר $\frac{V-1}{2}$ פעמים.

$\Leftarrow$ כל קשת יוצאת מהרשת $\leq \frac{V-1}{2}+1$ פעמים.

לגרסה זו של FF קוראים האלגוריתם של Edmonds - Karp.

נבנה רשת שיורית G_f. נריץ עליה BFS ונקבל רשת שכבתית.