אלגוריתמים – שיעור 10

אלגוריתם של דיניץ

המטרה היא לבנות רשת שכבתית מהרשת השיורית.
האלגוריתם מחפש הרבה מסלולים משפרים באותה רשת שכבתית כל עוד t נגיש מ-s ורק כש-t מפסיק להיות נגיש, נבנה רשת שיורית חדשה.

לאחר מציאת מסלול משפר נזרים דרכו זרימה השווה לקבול השיורי המינימלי על המסלול ונמחק את כל הקשתות הרוויות.

נפחית את קיבול הקשתות האחרות על המסלול. נתעלם מכל הקשתות ההפוכות לקשתות ברשת השכבתית כי שימוש בהן יוביל למסלול באורך $>k$.
עכשיו נוכל עקרונית להריץ שוב BFS על הרשת השכבתית החדשה.

במקום זה נמצא את כל המסלולים המשפרים ע"י הרצת DFS על הרשת השכבתית.

<u>ל-DFS הזה יש שלוש פרוצדורות : $Advance, Retreat, Augment$</u>.

<u>$Advance(u)$</u>: אם אין קשת יוצאת מ-u, לך ל-$Retreat(u)$.
אם יש קשת כזאת (u,v), $v \neq t$ אז נלך ל-v ונמשיך ברקורסיה ל-$Advance(v)$.
אם $v = t$ נבצע $Augment$.

<u>$Retreat(u)$</u>: אם $u = s$ זהו סוף הטיפול ברשת השכבתית הנוכחית. זהו סוף <u>הפאזה</u> הנוכחית.
אחרת נמחק את u ואת כל הקשתות הנכנסות אליו, נחזור לאב v שקרא ל-u ונבצע $Advance(v)$.

<u>$Augment$: (מסלול משפר)</u> נדחוף זרימה נוספת לאורך המסלול. נמחק קשתות רוויות, נקטין קיבול של שאר הקשתות ונחזור לצומת ההתחלה u של הקשת הרוויה הכי קרובה ל-s במסלול. נבצע $Advance(u)$.

כל עוד קיים מסלול ברשת השכבתית מ-s ל-t האלג' ימצא אותו.
כל קשת שנמחקת לא שייכת לשום מסלול משפר עתידי <u>באורך k</u>.

לכן כאשר אין מסלול מ-s ל-t ברשת השכבתית, אז אין מסלול משפר באורך k ברשת השיורית, ואז צריך לעבור לפאזה הבאה.
בפאזה חדשה, קודם נעדכן את הזרימה f ברשת המקורית ע"י כל הזרימה הנוספת שנצברה בפאזה. בונים רשת <u>שיורית</u> חדשה G_f. בונים רשת שכבתית חדשה ומתחילים ב-DFS.

נכונות

בכל פאזה הרשת השכבתית מכילה רק צמתים וקשתות שיכולים להופיע על מסלולים משפרים באורך k ($k =$ מספר הקשתות).

לסיכום, בסיום הפאזה, אין מסלולים משפרים ברשת השכבתית, ולכן אין מסלולים משפרים מ-s ל-t באורך k ברשת השיורית. הוכחנו שהמרחק מ-s ל-t עולה חלש לאחר כל שיפור, ולכן בסיום פאזה, מרחק מ-s ל-t ברשת השיורית ממש גדול מ-k.

לכן ברשת השכבתית בפאזה החדשה, מספר השכבות יהיה $> k$ ולכן מספר הפאזות $\leq |V| - 1$.

סיבוכיות

חישוב יעילות פאזה אחת – נקרא לקשת שמחקנו קשת חסומה.
כמה צעדים מבצע ה-DFS בין שתי חסימות עוקבות? $k \geq$, $O(|V|) \geq O(k)$.
מס' החסימות $\geq |E|$.

לכן עלות פאזה היא $O(|E| \cdot |V|)$.
לפיכך, האלגוריתם רץ בזמן $O(|E| \cdot |V|^2)$ לעומת $O(|E|^2 \cdot |V|)$ באדמונדס קארפ.

רשתות *0/1*

רשת שקיבול כל קשת הוא *0/1*.
האלג' של דיניץ יעיל מאוד על רשתות כאלה.

פאזה אחת של דיניץ לוקחת $O(|E|)$ זמן.
בתחילת הדרך $G_f = G$ וכל הקיבולים 1.

בעצם, לכל f במהלך האלגוריתם, כל הקיבולים ב-G_f הם 1.
כי אחרי מסלול משפר, שדרכו זורמת זרימה נוספת 1, <u>כל</u> הקשתות עליו נהיות רוויות ולכן יוצאות מהרשת השיורית. וכל הקשתות ההפוכות נכנסות לרשת השיורית עם קיבול שיורי 1.
כל קשת מקורית או ההפוכה שלה שייכת ל-G_f עם קיבול 1. בכל קשת מקורית בכל שלב, הזרימה היא 0 או 1.

כשמבצעים *Augment* מוחקים k קשתות. עלות ה-Augment היא $O(k)$.
בין Augment אחד לשני מספר הצעדים הוא פרופורציולי ל- ($k+$מספר הקשתות שנמחקו בגלל צמתים תקועים).

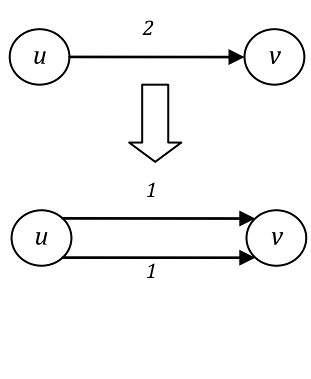
לכן דיניץ רץ בזמן $O(|V| \cdot |E|)$ על רשתות *0/1*.

באופן כללי, מס' הפאזות ברשת *0/1* הוא $O\left(\sqrt{|E|}\right)$, לכן סיבוכיות כוללת $O\left(|E|^{\frac{3}{2}}\right)$.

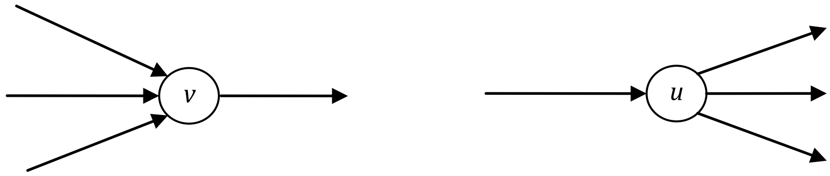
ברשת *0/1* מטיפוס 1 יש $O\left(|V|^{\frac{2}{3}}\right)$ פאזות, לכן סיבוכיות $O\left(|E| \cdot |V|^{\frac{2}{3}}\right)$.

ברשת *0/1* מטיפוס 2 יש $O\left(|V|^{\frac{1}{2}}\right)$ פאזות, לכן סיבוכיות $O\left(|E| \cdot |V|^{\frac{1}{2}}\right)$.

רשת מטיפוס 1 $\equiv$ אין בה קשתות מקבילות:



רשת מטיפוס 2 $\equiv$ לכל צומת יש דרגת כניסה 1 או דרגת יציאה 1:



<u>הערה חשובה</u>: טיפוס הרשת נשמר גם ברשתות השיוריות (נכון לטיפוס 1)

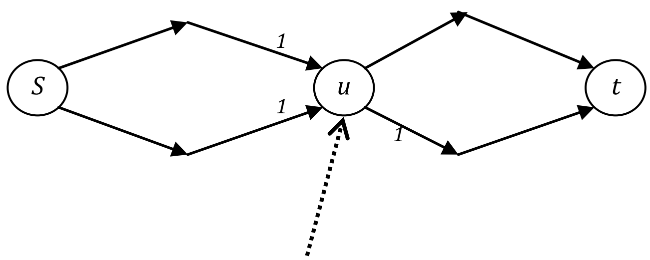
טיפוס 2 נשמר גם הוא: לאחר כל שיפור, מזרימים זרימה נוספת של 1 במסלול משפר, כל הקשתות נהיות רוויות ונמחקות מ-G_f וכל הקשתות ההפוכות נכנסות ל-G_f.

נראה שמספר הפאזות ברשת כללית הוא $O(|E|^{\frac{1}{2}})$ וברשת מטיפוס 2 הוא $O\left(|V|^{\frac{1}{2}}\right)$.

טענה

נניח שהזרימה הנוכחית $\equiv 0$ ושערך הזרימה המקסימלית M אז מס' השכבות ברשת השכבתית לרשת מטיפוס $k \le \frac{|V|-2}{M} + 1$, ולרשת כללית $\le \frac{|E|}{M}$.

נסתכל על הזרימה המקס' f ונסתכל על הקשתות הכיווניות עם זרימה 1.
הן מהוות מסלולים מ-s ל-t שזרים בקשתות. ולכן ברשת מטיפוס 2 המסלולים זרים בצמתים (פנימיים).



$\lambda =$ אורך המסלול הקצר ביותר מבין אלה.
מס' המסלולים = M (בכל מסלול זורמת זרימה 1).
לרשת כללית = סה"כ המסלולים משתמשים לפחות $M \cdot \lambda \le |E|$ כי זרים בקשתות, כלומר $\lambda \le \frac{|E|}{M}$.

לרשת מטיפוס 2: המסלולים משתמשים לפחות ב- $M(\lambda - 1)$ צמתים פנימיים.

$$M(\lambda - 1) \le |V| - 2 \Longrightarrow \lambda \le \frac{|V| - 2}{M} + 1$$

אבל $k \le \lambda$ אורך מינימלי של מסלול כלשהו מ-s ל-t.

<u>הוכחה לטיפוס 2:</u>

נריץ את דיניץ עד הפאזה שבעקבותיה ערך הזרימה הנוכחית עובר לראשונה (או שווה ל-) $M - |V|^{\frac{1}{2}}$ (ערך=M הזרימה המקסימלית).

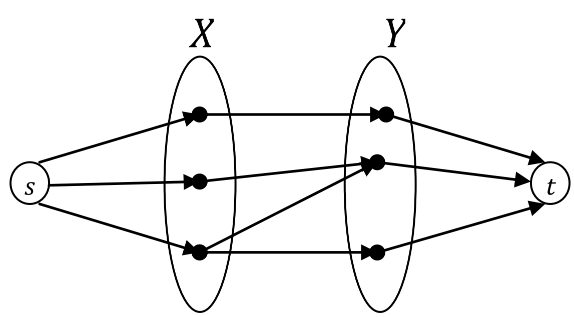
מרגע זה ואילך יש $\geq |V|^{\frac{1}{2}}$ פאזות כי כ"א מגדילה את ערך הזרימה לפחות ב-1.
נסמן ב-F את ערך הזרימה f בתחילת הפאזה $F < M - |V|^{\frac{1}{2}}$.

נייישם את הטענה עבור G_f כרשת מקורית, כאשר כרגע זורמת דרכה זרימה 0. הזרימה המקס' הנוספת שנוכל להזרים היא $M - F > |V|^{\frac{1}{2}}$.
לפי הטענה מס' השכבות k בפאזה הנוכחית $k \leq \frac{|V|-2}{M^*} + 1 \leq |V|^{\frac{1}{2}} + 1$ כאשר מס' הפאזות עד לרגע זה $\geq |V|^{\frac{1}{2}}$.
M^* זרימה מקסימלית ב-G_f = $M - F > |V|^{\frac{1}{2}}$.

שימושים של זרימה

זיווג מקסימלי

G גרף דו צדדי $V = X \underset{\text{זר}}{\cup} Y$, $E \leq X \times Y$. צריך למצוא אוסף מקסימלי של קשתות ב-E זרות בצמתים.
הופכים את הגרף לרשת זרימה:



נחשב זרימה מקסימלית וקשתות E רוויות מהוות זיווג מקסימלי.
F = ערך הזרימה המקסימלית.
M= גודל הזיווג המקסימלי.

רוצים להראות $M = F$.
זרימה היא זיווג כי דרך כל קשת רוויה זורמת זרימה של 1. בגלל טיפוס 2 אין 2 קשתות כאלה מאותו צומת ב-X לאותו צומת ב-Y.
לכן זרימה היא זיווג וגם להפך.

משפט *Hall*

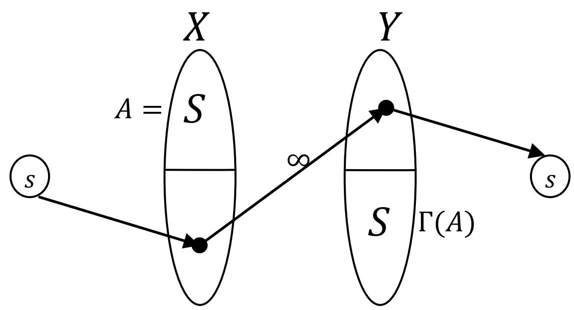
יהא G גרף דו צדדי $V = X \underset{\text{זר}}{\cup} Y$, $E \leq X \times Y$. $|X| = |Y|$.
לכל $A \subseteq X$ נסמן ב-$\Gamma(A)$ את קבוצת השכנים של צמתים של A ב-Y.
אז ל-G יש <u>זיווג מושלם</u>, זיווג בגודל $|X| = |Y|$ אמ"מ לכל $A \subseteq X$, $|\Gamma(A)| \geq |A|$.

אם קיים זיווג מושלם, התנאי מתקיים.

נניח $n = |X| = |Y|$. נבנה את רשת הזרימה, אבל נשנה את הקיבולים של כל הקשתות E ל-∞.
נניח שלא קיים זיווג מושלם $\Leftarrow M < n$(גודל זיווג מקסימלי).
$F = M$ ערך זרימה מקסימלית.

נסתכל ב-G_f עבור הזרימה המקסימלית f.

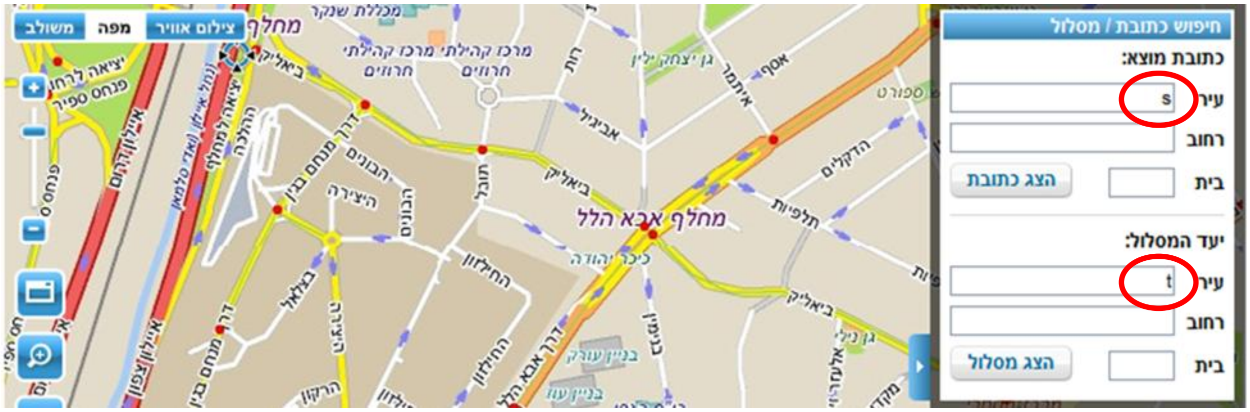
נסמן ב-S את כל הצמתים ברשת השכבתית האחרונה שנגישים מ-s. $s \in S$, $t \notin S$.



$$C(S, V \setminus S) = M$$

$$n - |A| + |\Gamma(A)| < n$$

$|\Gamma(A)| < |A|$ וסתירה.


משולב
מפה
צילום אוויר
מחלף אבא הלל
ביאליק
תלפיות
חיפוש כתובת / מסלול
כתובת מוצא:
עיר
s
רחוב
בית
הצג כתובת
יעד המסלול:
עיר
t
רחוב
בית
הצג מסלול